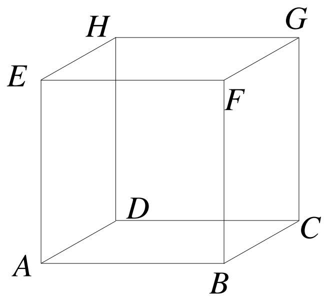
VECTEURS DE L'ESPACE

1. Vecteurs coplanaires

a. Les propriétés des vecteurs du plan (égalité, relation de Chasles, colinéarité) s'étendent aux vecteurs de l'espace.

b. Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires.

c. Trois vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont coplanaires si l'un d'entre eux peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres. C'est-à-dire s'il existe α et β tels que $\vec{u_1}=\alpha\vec{u_2}+\beta\vec{u_3}$ (ou peut-être pour $\vec{u_2}$ ou $\vec{u_3}$).
Exemple : Dans le cube $ABCDEFGH$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$.



d. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires équivaut à dire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

e. Trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace. C'est-à-dire que que si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe trois réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

2. Repère

a. Un repère de l'espace est constitué d'un point et de trois vecteurs non coplanaires.
Exemple : Dans le cube ci-dessus, $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

b. Un repère de l'espace est orthogonal si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Il est orthonormé (ou orthonormal) s'il est orthogonal et si ses vecteurs sont de norme 1. Si $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1, le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormé.

c. Dire que le point A a pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ équivaut à dire que $\overrightarrow{OA}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$.

Remarque : Les trois coordonnées d'un point de l'espace s'appellent respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote.

d. Les propriétés sur les coordonnées des points et vecteurs du plan (distance, coordonnées d'un vecteur, cordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs,...) s'étendent aux points et vecteurs de l'espace.

3. Systèmes d'équations paramétriques d'objets de l'espace

a. Représentation paramétrique d'une droite

Étant donnés un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et un vecteur $\vec{u}(a\,;b\,;c)\neq\vec{0}$, Le point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$. Donc :

$$M\in d \iff \overrightarrow{AM}=k\vec{u} \iff \begin{cases} x-x_A=k\,a \\ y-y_A=k\,b \\ z-z_A=k\,c \end{cases} \iff \begin{cases} x=k\,a+x_A \\ y=k\,b+y_A \\ z=k\,c+z_A \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé représentation paramétrique de la droite d.

Remarque : Une représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique.

b. Représentation paramétrique d'un plan

Étant donnés un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et deux vecteur $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ et $\vec{v}(a'\,;b'\,;c')$, Le point $M(x\,;y\,;z)$ appartient au plan P passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si il existe deux réel k et k' tels que $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}+k'\vec{v}$.

Donc :

$$M\in d \iff \overrightarrow{AM}=k\vec{u}+k'v' \iff \begin{cases} x-x_A=k\,a+k'a' \\ y-y_A=k\,b+k'b' \\ z-z_A=k\,c+k'c' \end{cases} \iff \begin{cases} x=k\,a+k'a'+x_A \\ y=k\,b+k'b'+y_A \\ z=k\,c+k'c'+z_A \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé représentation paramétrique du plan P. Elle n'est pas unique.

4. Équations de plans

a. Produit scalaire dans l'espace

La définition et les propriétés du produit scalaire dans le plan s'étendent à l'espace sans changements.

En particulier, Si $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormal, et si on a $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$, alors $\vec{u}.\vec{v}=x\,x'+y\,y'+z\,z'$.

Remarque : Dans l'espace, on est obligé de considérer des angles de vecteurs non orientés, mais les propriétés restent inchangées.

b. Vecteur normal à un plan

On dit que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan P s'il est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs de P (c'est-à-dire, deux vecteurs non colinéaires de P)

Si $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P et A un point de P, P est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ c'est-à -dire, tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$.

c. Équation cartésienne d'un plan

Si P est le plan passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{u}(a ; b ; c)$, alors $M(x ; y ; z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0$.

Cette dernière équation est une équation cartésienne de P.

Réciproquement, Pour tous réels a , b , c et d tels que $(a ; b ; c)\neq(0 ; 0 ; 0)$, l'équation $a x+b y+c z+d = 0$ est l'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{u}(a ; b ; c)$.